Hans-Joachim BRENNER, Erfurt

Die Greensche Methode in der Lehrerfortbildung

1. Ziele und Ausgangspunkte

Das Ziel meiner Bestrebungen besteht darin, ausgehend von meinen Beobachtungen des Analysisunterrichts in Thüringen, Vorschläge für Fortbildungsveranstaltungen zu entwickeln, die einen Beitrag zur Weiterentwicklung der Professionalität der Thüringer Lehrerinnen und Lehrer leisten können.

2. Grundsätzliches und wissenschaftliche Befunde

Fortbildungen für erfahrene Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer müssen (wie im Unterricht auch) der Wechselwirkung und der gegenseitigen Abhängigkeit von Persönlichkeitsentwicklung und dem Lernen von Mathematik Rechnung tragen. Um dem gerecht werden zu können, sollten:

- die Ernsthaftigkeit des Bemühens des Fortbildners/der Fortbildnerin spürbar werden (für die Lernmotivation ist der Lehrer/die Lehrerin das wichtigste Medium [Spitzer, S. 194]),
- das mathematisch Neue, die mathematische Idee in den Mittelpunkt gestellt werden,
- die Beziehungshaltigkeit und die Bedeutung des gewählten mathematischen Inhalts möglichst hoch sein, um vernetzt bzw. vernetzend denken zu können [Hischer, S. 46 - 81]),
- das Bekannte und das schulisch Bedeutsame im Neuen entdeckt werden können (Anschlussfähigkeit).

Der regelmäßige Besuch (mindestens ein Mal im Monat einschließlich einem entsprechenden Selbststudium) von Fortbildungsveranstaltungen sollte ein unerlässlicher Bestandteil des lebenslangen Lernens auf mathematisch-didaktischem Gebiet sein.

Durch COACTIV wurde bestätigt, dass zwischen dem fachlichen und dem fachdidaktischen Wissen eine enge Verbindung besteht. Krauss und Blum [Blum, S. 43-44] berichteten auf der Fachleitertagung der MNU 2009: „Die Wissensentwicklung scheint nach der Ausbildung im Wesentlichen abgeschlossen zu sein … Die Berufspraxis liefert keinen entscheidenden Beitrag mehr zur Entwicklung der beiden Wissensbereiche: Fachdidaktisches Wissen und Fachwissen (wie es in COACTIV konzeptualisiert wurde) werden primär bereits während der Ausbildung erworben. Die bedenkenswerte Tatsache, dass gymnasiale Lehrkräfte auch über signifikant mehr fachdidaktisches Wissen verfügen …, kann als ein Hinweis für die Bedeutung, die das Fachwissen bei der Entwicklung von fachdidaktischem Wissen spielt, gesehen werden. … Von entscheidender Bedeutung ist das Ergebnis, dass das fachdidaktische Wissen einer Lehrkraft nachweislich zum Lernzuwachs der Schüler beiträgt …“

Dass fachdidaktisches Wissen (auch) bei der intensiven Beschäftigung mit mathematischen Problemen im erheblichen Maße erworben wird, muss seitens der Didaktik und der Verantwortlichen für Fortbildungen die entsprechende Berücksichtigung erfahren. Die Erkenntnis durch COACTIV, dass die Berufspraxis keinen entscheidenden Beitrag zur Wissensentwicklung im Fach und in der Didaktik leistet, zeigt zum einen, welche großen Anstrengungen seitens der Fortbildungsverantwortlichen nötig sind, diesen Missstand zu beheben. Und zum anderen wird die Beschränktheit der Möglichkeiten der Deutung eines schriftlichen Wissenstest mit vorgegebener Bedenkzeit deutlich.

Zu beachten ist weiterhin der Umstand, dass auf Grund verschiedener Ursachen die Bereitschaft der Kolleginnen und Kollegen sehr gering ist, die Anstrengungen fachlicher Fortbildungen auf sich zu nehmen. So gab es nicht eine Anforderung von „Mathematik anders machen“ aus Thüringen. Einstellige Teilnehmerzahlen (einschließlich null) an Fortbildungsveranstaltungen in Erfurt sind die Regel.

3. Beobachtungen des Analysisunterrichts in Thüringen

Meine Beobachtungen zeigen, dass der Kerngedanke des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung wegen des unverzüglichen Anstrebens von Rechenverfahren nicht mehr zur Sprache kommt. In der Regel (sehr oft auch ohne Beweis) wird im Zusammenhang mit Flächeninhaltsberechnungen unter dem Hauptsatz die Beziehung (1) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ verstanden. Wenn man also eine Stammfunktion F kennt, dann kann dem Integral (Flächeninhalt) ein Wert zugeordnet werden. Der Hauptsatz wird auf eine Wertzuweisung reduziert. Er stellt aber den Zusammenhang zwischen zwei Größen (in der Einführungsphase von zwei physikalischen Größen) her. Wenn (2) $v = \frac{ds}{dx}$, dann $s = \int vdt$ und umgekehrt, wobei die präzisen Bedingungen noch erarbeitet werden müssen, um $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ herleiten zu können. Der Zusammenhang (2) ermöglicht die Verankerung in Alltagserfahrungen und somit die Erarbeitung von Grundvorstellungen und Verständnis. Die *grundlegenden Methoden* der Differenzialrechnung - die Vorstellung von der lokalen Änderungsrate, z.B. der Momentangeschwindigkeit - und der Integralrechnung - die Vorstellung vom Grenzwert einer Summe bei fortwährender Verfeinerung der Zerlegung bzw. der Rekonstruktion einer Größe aus den Änderungsraten - sind Hauptgegenstand des Lernprozesses und entsprechend vielfältig zu üben. Da sich die Schülerinnen und Schüler die Folgerung (1) nicht durch angestrengtes Lernen aneignen können, sind die Defizite bei der Problemlösefähigkeit, die auch bei den Lehrerinnen und Lehrern zu beobachten sind, nur folgerichtig. Ein Ziel von Fortbildung sollte daher sein, Differenzerfahrungen zur gängigen Praxis zu ermöglichen, um sich des bestehenden Mankos bewusst werden zu können. Ein geeigneter mathematischer Gegenstand ist die Greensche Methode (z.B. angewandt auf das Fallen $F_R \sim v$, Einschaltvorgänge). Hier kann man „dem Prinzip der minimalen Allgemeinheit" folgen, „gemäß welchem jede Idee zunächst in der einfachsten Situation klar verstanden werden muss, bevor die entwickelte Methode auf kompliziertere Fälle übertragen werden kann." [Arnold, Vorwort]

4. Die Greensche Methode

Mit Hilfe der Greenschen Methode kann man partikuläre Lösungen von inhomogenen Differenzialgleichungen bestimmen. Solche DGL treten im Physikunterricht auf (Schwingungen, Fallbewegung, Ein- und Ausschaltvorgänge) und sollten im Analysisunterricht genutzt werden, um das Bestimmen von qualitativen Eigenschaften von Funktionen, ihren Ableitungen und Integralen zu erlernen.

Ein *Beispiel* für einen Mischungsprozess soll unter diesem Aspekt untersucht werden. [Heuser, S. 76]

Ein Tank enthalte 1000 L Wasser, in dem 50 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ sollen ständig pro Minute 10 L Lösung ausfließen, aber auch 10 L Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg zufließen (Zufluss = Abfluss). Ein Superrührgerät mische das Ganze sofort und vollständig durcheinander. Wie groß ist der Salzgehalt $u(t)$ im Tank zur Zeit $t \geq 0$?

Die Änderungen des Salzgehaltes Δu in kg in einer Zeiteinheit Δt ergeben sich aus der Differenz der Salzgehalte des Zuflusses $2 \cdot \Delta t$ und des Abflusses in der gewählten Zeiteinheit $\approx \frac{1}{100} \cdot u(t) \cdot \Delta t$. Da sich der Salzgehalt des Abflusses ständig verändert, wird ein Mittelwert $u(\bar{t})$ in der folgenden Darstellung benutzt. $\Delta u = 2 \cdot \Delta t - \frac{1}{100} \cdot u(\bar{t}) \cdot \Delta t$

Division durch Δt und Grenzwertbildung liefert (1) $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{100} \cdot u(t) + 2$ mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Anfangsbedingung $u(0) = 50$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet $u_h(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$ und eine partikuläre ist $u_p(t) = 200$ (punktweises Rekonstruieren des Graphen und Erraten mit anschließender Probe bzw. bekannte Verfahren anwenden). Wegen der Additivität der Lösungen findet man zur allgemeinen Lösung von (1): $u(t) = 200 + K \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$ (Beweis: …). Passt man die Konstante der Anfangsbedingung an, erhält man $u(t) = 200 - 150 \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$.

Dieses Ergebnis lässt sich auch wie folgt deuten. Enthält der Behälter zu Beginn kein Salz und wird dann wie angegeben Flüssigkeit zu- und abgeführt, so gilt $u_1(t) = 200 - 200 \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$. Parallel zum betrachteten Behälter stellt man sich einen weiteren baugleichen vor, in dem anfangs 50 kg Salz gelöst sind und bei dem 10 L reines Wasser pro min zufließen und die gleiche Menge Lösung abfließt. Für diesen gilt dann $u_2(t) = 50 \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$. Der Salzgehalt zum Zeitpunkt *t* ist dann die Summe der beiden Salzgehalte eins und zwei. Die physikalische Größe *u* ist somit *additiv* (und der Differenzialoperator ist *linear*). Dies macht man sich bei der *Greenschen Methode* zunutze.

Es wird die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ gestellt; die Bedingungen bezüglich des Zu- und Abflusses sollen wie oben sein. Um den Salzgehalt $u(t)$ bestimmen zu können, denkt man sich die Zeitspanne von 0 bis *t* in (äquidistante) Abschnitte zerlegt: $0 < t'_1 < t'_2 < \cdots < t'_n < t$. Für jeden Zeitabschnitt $\Delta t'$ stellt man sich einen salzfreien mit Wasser gefüllten Behälter mit Abfluss (wie oben) und Superrührgerät vor, in den nur in dieser Zeiteinheit die Salzlösung zugeführt wird, in der anderen Zeit (also vorher und nachher) nur reines Wasser. Die eingeführte Salzmenge beträgt $2 \cdot \Delta t'$ und zum Zeitpunkt *t* sind davon noch $e^{-\frac{1}{100} \cdot (t - t'_i)} \cdot 2 \cdot \Delta t'$ vorhanden. Alle Salzgehalte zum Zeitpunkt *t* in den vorgestellten Behältern werden addiert. Geht man zum Grenzwert $\Delta t \to 0$ über, so ergibt sich $u(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{100} \cdot (t - t')} \cdot 2 \cdot dt' = u_1(t)$ wie oben. Man kann sich natürlich auch nur einen Behälter vorstellen, der mit *n* Zuflüssen gemäß den obigen Überlegungen gefüllt wird und entsprechend viele Abflüsse hat.

Literatur

Blum, W., Krauss, S. (2009): Vortrag auf der Fachtagung der MNU

Hischer, H. (2010): Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker

Spitzer, M. (2002): Lernen, Gehirnforschung und die Schule des Lebens. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag

Arnold, V.I. (2004): Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Heuser, H. (2009): Gewöhnliche Differentialgleichungen. Wiesbaden: Vieweg Verlag